

## Modelltheorie

Blatt 7

Abgabe: 12.12.2022, 17 Uhr

### Aufgabe 1 (6 Punkte).

In der Sprache  $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , welche aus unendlich vielen Konstantenzeichen  $c_n$  und aus einem 2-stelligen Relationszeichen besteht, betrachte die  $\mathcal{L}$ -Theorie  $T$ , deren Redukt zu  $\{<\}$  die Theorie DLO dichter linearer Ordnungen ist und in deren Modellen  $\mathcal{A}$  die Folge  $(c_n^{\mathcal{A}})$  streng wachsend ist, das heißt, für jedes  $n$  aus  $\mathbb{N}$  gilt  $c_n^{\mathcal{A}} < c_{n+1}^{\mathcal{A}}$ .

- Zeige, dass  $T$  vollständig ist und Quantorenelimination hat.
- Zeige, dass  $T$  bis auf Isomorphie genau drei abzählbare Modelle besitzt. Diese können mit Universum  $\mathbb{Q}$  gewählt werden.

**HINWEIS:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{\mathcal{A}}$

### Aufgabe 2 (7 Punkte).

Seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  zwei  $\mathcal{L}$ -Strukturen sowie  $A \subset M$  und  $A' \subset N$  mit einer elementaren Abbildung  $h : A \rightarrow A'$ .

- Gegeben  $b$  aus  $M$  und  $b'$  aus  $N$  zeige, dass  $b'$  den Typ  $h(\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A))$  genau dann realisiert, wenn die Fortsetzung  $h' = h \cup \{(b, b')\}$  von  $h$  elementar ist.

Nun sei  $\mathcal{L} = \{E\}$  und  $\mathcal{M}$  ein abzählbares Modell der Theorie  $T$  aus Aufgabe 2 von Blatt 4 welche besagt, dass  $E^{\mathcal{M}}$  eine Äquivalenzrelation mit genau zwei unendlich Klassen ist. Betrachte eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von verschiedenen Elementen aus  $M$  derart, dass für alle Indizes  $i_0 < \dots < i_n$  gilt:

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(a_0, \dots, a_n) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_0}, \dots, a_{i_n}).$$

- Zeige, dass das abzählbare Modell  $\mathcal{M}$  von  $T$  saturiert ist.
- Zeige, dass für jede solche Folge die Elemente  $a_n$  für alle  $n$  aus  $\mathbb{N}$  in derselben Klasse liegen müssen. Gib (informell) eine mögliche Wahl solcher Elemente  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  an.

### Aufgabe 3 (7 Punkte).

Sei  $\mathcal{M}$  eine Struktur in der Sprache  $\mathcal{L}$  und  $B \subset M$  eine Teilmenge. Betrachte die *Einschränkungsabbildung* auf die erste Variable:

$$\begin{aligned} \pi : S_2^{\mathcal{M}}(B) &\rightarrow S_1^{\mathcal{M}}(B). \\ q(x, y) &\mapsto \{\varphi[x] \text{ } \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[x] \in q(x, y)\}. \end{aligned}$$

- Zeige, dass  $\pi$  wohldefiniert ist.
- Zeige, dass  $\pi$  surjektiv aber nicht injektiv ist.

**(Bitte wenden!)**

c) Sei nun  $p(x) = \text{tp}(c/B)$  in  $S_1^{\mathcal{M}}(B)$  ein realisierter Typ. Zeige, dass die Abbildung:

$$\begin{aligned} f : S_1^{\mathcal{M}}(B, c) &\rightarrow \pi^{-1}(p) \subset S_2^{\mathcal{M}}(B) \\ q(y) &\mapsto p(x) \cup \{\varphi[x, y] \text{ } \mathcal{L}_B\text{-Formel, mit } \varphi[c, y] \in q(y)\}. \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

---

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER  
IM FACH 2.30 IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.